Rangovi Egzostivnosti Maharam Algebri

Žikica Perović

MiraCosta College

25/ 11/ 2016

Kompletna Bulova algebra $\mathcal{B}$ je *merljiva algebra* ako se na njoj može definisati strogo pozitivna σ-aditivna verovatnosna mera ν. Kažemo da je $(\mathcal{B}, \nu)$ algebra mere.

Kompletna Bulova algebra $\mathcal{B}$ je *merljiva algebra* ako se na njoj može definisati strogo pozitivna σ-aditivna verovatnosna mera ν. Kažemo da je $(\mathcal{B}, \nu)$ algebra mere.

- $\mathcal{B}$ zadovoljava *uslov prebrojivih lanaca* (ccc), ako je svaka familija disjunktnih elemenata od $\mathcal{B}$ najviše prebrojiva.

Kompletna Bulova algebra $\mathcal{B}$ je *merljiva algebra* ako se na njoj može definisati strogo pozitivna σ-aditivna verovatnosna mera ν. Kažemo da je $(\mathcal{B}, \nu)$ algebra mere.

- $\mathcal{B}$ zadovoljava *uslov prebrojivih lanaca* (ccc), ako je svaka familija disjunktnih elemenata od $\mathcal{B}$ najviše prebrojiva.

- $\mathcal{B}$ je *slabo distributivna*, ako za svaku prebrojivu kolekciju nizova $\{b_{n,k}\}_{n,k}$ elemenata od $\mathcal{B}$ važi:

$$\bigwedge_{n} \bigvee_{k} b_{n,k} = \bigvee_{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}} \bigwedge_{n} \bigvee_{i<f(n)} b_{n,i}$$

Pitanje (Von Neumann, 1937)

Da li je svaka ccc slabo distributivna kompletna Bulova algebra merljiva algebra?

Podmera na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je funkcija $\nu : \mathcal{B} \to [0,1]$ takva da

Podmera na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je funkcija $\nu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ takva da

(1) $\nu(\mathbf{0}) = 0$

Podmera na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je funkcija $\nu : \mathcal{B} \to [0,1]$ takva da

(1) $\nu(\mathbf{0}) = 0$

(2) Ako $x \leq y$ onda $\nu(x) \leq \nu(y)$

Podmera na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je funkcija $\nu : \mathcal{B} \to [0,1]$ takva da

(1) $\nu(\mathbf{0}) = 0$

(2) Ako $x \leq y$ onda $\nu(x) \leq \nu(y)$

(3) $\nu(x \vee y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

Kažemo da je ν *strogo pozitivna* ako $\nu(a) > 0$, za svaki $a \in \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Oslabimo na $\mathcal{B}$ uslov σ-aditivnosti zamenivši ga sledecim uslovom neprekidnosti.

Oslabimo na $\mathcal{B}$ uslov σ-aditivnosti zamenivši ga sledecim uslovom neprekidnosti.

(4) $\nu(x_n) \to \nu(\inf_n x_n)$, za svaki opadajući niz $\{x_n\}_n$.

Oslabimo na $\mathcal{B}$ uslov σ-aditivnosti zamenivši ga sledecim uslovom neprekidnosti.

(4) $\nu(x_n) \to \nu(\inf_n x_n)$, za svaki opadajući niz $\{x_n\}_n$.

Za podmeru ν koja zadovoljava uslov (4) kažemo da je neprekidna mera a za Bulovu algebru na kojoj je definisana da je *Maharam algebra*.

Pitanje 1

Da li je svaka ccc slabo distributivna kompletna Bulova algebra Maharam algebra?

Pitanje 1

Da li je svaka ccc slabo distributivna kompletna Bulova algebra Maharam algebra?

Pitanje 2

Da li je svaka Maharam algebra merljiva algebra?

Pitanje 1

Da li je svaka ccc slabo distributivna kompletna Bulova algebra Maharam algebra?

Pitanje 2

Da li je svaka Maharam algebra merljiva algebra?

Odgovori na Pitanje 1

Teorema (Balcar,Jech,Pazak, 2003; Veličković, 2004)

Pozitivan odgovor na Pitanje 1 konzistentan je sa ZFC.

Odgovori na Pitanje 1

Teorema (Balcar,Jech,Pazak, 2003; Veličković, 2004)

Pozitivan odgovor na Pitanje 1 konzistentan je sa ZFC.

Teorema (Todorčević, 2004)

Sledeća tvrdjenja ekvivalentna su za svaku kompletnu Bulovu algebru $\mathcal{B}$.

- $\mathcal{B}$ *nosi strogo pozitivnu neprekidnu podmeru,*
- $\mathcal{B}$ *je slabo distributivna i* $\mathcal{B}$ *zadovoljava* σ*-konačni uslov lanaca.*

- Podmera μ na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je *egzostivna* ako za svaki niz $\{a_n\}_n$ disjunktnih elemenata iz $\mathcal{B}$ važi $\lim_n \mu(a_n) = 0$.

- Podmera μ na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ je *egzostivna* ako za svaki niz $\{a_n\}_n$ disjunktnih elemenata iz $\mathcal{B}$ važi $\lim_n \mu(a_n) = 0$.

- Podmera μ je *uniformno egzostivna* ako za svako $\epsilon > 0$ postoji ceo broj n tako da svaki niz disjunktnih elemenata $\mathcal{B}$ μ-submeasure $\geq \epsilon$ ima dužinu najviše n.

Teorema (Kalton & Roberts, 1983)

Podmera μ definisana na (ne neophodno kompletnoj) Bulovoj algebri $\mathcal{B}$ ekvivalenta je meri akko je uniformno egzostivna.

Pitanje 2

Da li je svaka Maharam algebra merljiva algebra?

Teorema (Talagrand, 2005)

Postoji Maharam algebra koja nije merljiva algebra.

Neka je $\mathcal{B}$ Bulova algebra i ν egzostivna podmera na $\mathcal{B}$. Za $\epsilon > 0$, neka je $\mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})$ skup svih konačnih familija F medjusobno disjunktnih elemenata of $\mathcal{B}$ takvih da je $\nu(a) > \epsilon$, za svaki $a \in F$.
Definišimo uredjenje na $\mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})$ tako da $F \leq G$ iff $G \subseteq F$.
Neka je $rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)$ rang ovog uredjenja:

$$\begin{aligned} rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(F) &= \sup\{rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(G) + 1 : F \subsetneq G\} \\ rk_\epsilon(\mathcal{B}; \nu) &= \sup\{rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(F) : F \in \mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})\} \end{aligned}$$

Neka je $\mathcal{B}$ Bulova algebra i ν egzostivna podmera na $\mathcal{B}$. Za $\epsilon > 0$, neka je $\mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})$ skup svih konačnih familija F medjusobno disjunktnih elemenata of $\mathcal{B}$ takvih da je $\nu(a) > \epsilon$, za svaki $a \in F$. Definišimo uredjenje na $\mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})$ tako da $F \leq G$ iff $G \subseteq F$.
Neka je $rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)$ rang ovog uredjenja:

$$
\begin{aligned}
rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(F) &= \sup\{rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(G) + 1 : F \subsetneq G\} \\
rk_\epsilon(\mathcal{B}; \nu) &= \sup\{rk_\epsilon(\mathcal{B}, \nu)(F) : F \in \mathcal{D}_\epsilon(\mathcal{B})\}
\end{aligned}
$$

$$rk(B; \nu) = \sup\{rk_\epsilon(\mathcal{B}; \nu) : \epsilon > 0\}$$

Neka je $(\mathcal{B}, \nu)$ Maharam algebra koja nije merljiva.

Neka je $(\mathcal{B}, \nu)$ Maharam algebra koja nije merljiva.

- $rk(B; \nu) \geq \omega^{\omega}$.

Neka je $(\mathcal{B}, \nu)$ Maharam algebra koja nije merljiva.

- $rk(B; \nu) \geq \omega^\omega$.
- Ako je $\mathcal{B}$ Maharam algebra koju je konstruisao Talagrand, onda je $rk(B, \nu) \leq \omega^{\omega^2}$ (Fremlin).

Neka je $(\mathcal{B}, \nu)$ Maharam algebra koja nije merljiva.

- $rk(B; \nu) \geq \omega^\omega$.
- Ako je $\mathcal{B}$ Maharam algebra koju je konstruisao Talagrand, onda je $rk(B, \nu) \leq \omega^{\omega^2}$ (Fremlin).

Pitanje (Fremlin)

Mogu li Maharam algebre imati proizvoljno visok prebrojiv rang egzostivnosti?

Teorema (P,Veličković)

Postoje egzostivne podmere proizvoljno visokog prebrojivog ranga na Bulovoj algebri otvoreno-zatvorenih podskupova Kantorovog prostora.

Definicija

Za $\xi < \omega_1$, definišemo Schreier-ove familije rekurzivno:

(i) $\mathcal{S}_0 = \{\emptyset\} \cup \{\{n\} : n \in N\}$

(ii) *Ako je ξ naslednji ordinal, recimo $\xi = \zeta + 1$, definišemo*
$$S_{\xi+1} = \{\bigcup_{k=1}^{n} F_k : n \leq F_1 < F_2 < \cdots < F_n, F_k \in S_\xi\},$$

(iii) *Ako je ξ granični odinal, neka je (ξ_n) prethodno fiksirani rastući niz naslednih ordinala koji imaju limes ξ. Tada definišemo*

$$\mathcal{S}_\xi = \{F : F \in S_{\xi_n}, n \leq F\}.$$

Definicija

Neka je $\mathcal{S}$ familija konačnih podskupova od $\mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathcal{S}$:

(1) nasledna *ako je zatvorena za relaciju podskupova.*

(2) šireća *ako iz $A \in \mathcal{S}$ i $A \leq_s B$ sledi $B \in \mathcal{S}$.*

(3) kompaktna *ako je kompaktan podskup od $2^{\mathbb{N}}$ u odnosu na proizvod topologiju, gde se podskup identifikuje sa karakterističnom funkcijom.*

Za svako $0 < \alpha < \omega_1$, $\mathcal{S}_\alpha$ je kompaktna, nasledna, šireća i sadrži sve singltone.

Možemo definisati normu $||\cdot||_{\mathcal{S}_\alpha}$ definišući $||A||_{\mathcal{S}_\alpha}$ kao najmanji broj elemenata od $\mathcal{S}_\alpha$ potrebnih da pokriju A.

Tvrdjenje

Norma $||\cdot||_{\mathcal{S}_\alpha}$ *ima sledeće osobine:*

(1) $||\emptyset|| = 0$ *i* $||\{n\}|| = 1$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(2) *ako je* $A \subseteq B$ *onda* $||A|| \leq ||B||$,

(3) $||A \cup B|| \leq ||A|| + ||B||$, *za svaki* $A, B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$.

(4) nije ograničena *tj* $\lim_{n\to\infty} ||A \cap n|| = +\infty$, *za svaki beskonačan skup* $A \subseteq \mathbb{N}$,

(5) šireća je *tj.* $||A|| \leq ||B||$, *za svaki* $A, B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ *takve da* $A \leq_s B$.

Radimo sa $T = \prod_{n \in \mathbb{N}} 2^n$.

Definicija

Neka je $\mathcal{S}_\alpha$ Schreierova familija ranga α i $\|dom(u)\|_\alpha$ norma definisana u odnosu na $\mathcal{S}_\alpha$ Neka je P kolekcija svih konačnih parcijalnih funkcija u tako da je $dom(u) \subseteq N$ i $u(k) < 2^k$, za svaki $k \in dom(u)$.

Neka je za $\alpha < \omega_1$, P_α skup svih parcijalnih funkcija sa malim domenom tj.

$$P_\alpha = \{u \in P : \|dom(u)\|_\alpha \leq 1\}.$$

Konačno, za $u \in P$ neka je $N(u) = \{f \in T : u \subseteq f\}$.

Teorema

Neka je za $\alpha < \omega_1$, $\mathcal{F}_\alpha = \{N(u) | u \in P_\alpha\}$ *i neka je* $\mathcal{D}_\alpha$ *drvo familija disjunktnih elemenata od* $\mathcal{F}_\alpha$ *uredjenih reverznom inkluzijom. Tada imamo:*

$$rk(\mathcal{D}_\alpha) \geq \omega^\alpha.$$

Proof.

Uradićemo dokaz indukcijom. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $\beta < \omega_1$. Dokažimo da je tačno za $\alpha = \beta + 1$. Neka je prvi potez igrača I, $\omega^\beta \cdot n_0 + \rho$, $\rho < \omega^\beta$. Mi biramo $m \in N$ tako da $2^m > n_0$, i biramo jednu od vrednosti recimo i. Takodje biramo u_ρ tako da N_{u_ρ} je odgovor u β igri za potez ρ, ali sa domenom transliranim za $m+1$. Biramo $u = \{(m,i)\} \cup u_\rho$. Kako je unija jedne tačke i β-malog skupa α-mala, $u \in P_\alpha$. N_u je naš odgovor kao Igrača II. Dok god igrač I igra poteze sa istim n_0 tj. unutar ρ, na osnovu IH mi možemo da igramo poteze na osnovu igre $\|\|_\beta$ ispod ρ dobijajući skupove disjunktne sa N_u, sledeći opadanje ordinala. Ako igrač I smanji koeficijent uz ω^β ispod n_0, biramo različitu vrednost j u m, i biramo $u = \{(m,j)\}$. Ovo garantuje da je u inkompatibilna sa prethodno konstruisanim parcijalnim funkcijama koje sve imaju vrednost i u m.

□

Tvrdjenje

Neka je $\alpha < \omega_1$. Postoji egzostivna podmera ν_α on $Clop(T)$ takva da $\nu_\alpha(N_u) \geq 8$ za svaki $u \in P_\alpha$.

Definicija

Neka su $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *dve Bulove algebre koje nose egzostivne podmere* μ *i* ν, *i* X, Y *njihovi Stonovi prostori. Neka je* $\mathcal{B} = Clop(X \times Y)$, *i neka je* $A \in \mathcal{B}$ *otvoreno-zatvoren podskup od* $X \times Y$. *Za* $x \in X$, *neka je* A_x *vertikalna sekcija odredjena sa* x. *Definišimo podmeru na* $\mathcal{B}$ *na sledeć i način:*

$$\begin{aligned} \mu \star \nu(A) &= \inf\{\eta : \mu(\{x \in T : \nu(A_x) > \eta\}) < \eta\} \\ &= \sup\{\eta : \mu(\{x \in T : \nu(A_x) > \eta\}) > \eta\}. \end{aligned}$$

Iterirani Proizvod Podmera

Teorema

Neka su $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Bulove algebre koje nose egzostivne podmere μ i ν i neka je $\mu \star \nu$ iterirani proizvod ovih mera na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$. Podmera $\mu \star \nu$ je takodje egzostivna.